

LAGRANJ VA NYUTON INTERPOLYATSIYA USULLARINING FUNKSIYALARNI YAQINLASHTIRISHDA QO‘LLANILISHI

Rashidova Lobar Zohid qizi

Kattaqo‘rg‘on davlat pedagogika instituti
Matematika va informatika yo‘nalishi talabasi
lobarrashidova1106@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada murakkab funksiyalarni soddaroq ko‘rinishdagi funksiyalar bilan almashtirish, ya‘ni funksiyalarni yaqinlashtirish masalalari tadqiq etiladi. Funksiyalarni yaqinlashtirishning asosiy maqsadi hisoblash jarayonlarini optimallashtirish va murakkab matematik modellarni soddalashtirishdan iborat. Buning uchun ko‘p hollarda funksiya o‘ziga yaqin ko‘phad bilan almashtiriladi. Maqolada funksiyaning ko‘phad bilan yaqinlashtirishning eng keng tarqalgan usullari — Lagranj va Nyuton interpolatsiya formulalarining nazariy asoslari hamda ularning funksiyalarni ko‘phadlar yordamida yaqinlashtirishdagi amaliy ahamiyati tahlil qilingan. Shuningdek, ushbu usullar yordamida amaliy misollar keltirilgan.

Kalit so‘zlar: Funksiyaning yaqinlashtirish, interpolatsiya, Lagranj ko‘phadi, Nyuton formulasi, bo‘linmali farqlar.

Annotation. This article explores the problems of replacing complex functions with simpler-looking functions, i.e. function approximations. The main purpose of approximating functions is to optimize computational processes and simplify complex mathematical models. This article explores the problems of replacing complex functions with simpler-looking functions, i.e. function approximations. The main purpose of approximating functions is to optimize computational processes and simplify complex mathematical models. To do this, in most cases, the function is replaced by a polynomial close to it. The paper analyzed the most common methods for approximating a function with a polynomial — the theoretical foundations of the Lagrange and Newton interpolation formulas, and their practical significance in approximating functions using polynomials. The paper analyzed the most common methods for approximating

Keywords: Function approximation, interpolation, Lagrange polynomial, Newton's formula, divisible differences.

Аннотация. В данной статье будут рассмотрены вопросы замены сложных функций более простыми, т. е. аппроксимации функций. Основная цель аппроксимации функций-оптимизировать вычислительные процессы и упростить сложные математические модели. В данной статье будут рассмотрены вопросы замены сложных функций более простыми, т. е. аппроксимации функций. Основная цель аппроксимации функций-оптимизировать вычислительные процессы и упростить сложные математические модели. Для этого в большинстве случаев функция заменяется близким к ней многочленом. В статье проанализированы наиболее распространенные методы аппроксимации функции полиномом — теоретические основы интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона и их практическое значение при аппроксимации функций полиномами. В статье проанализированы наиболее распространенные методы аппрок

Ключевые слова: Аппроксимация функции, интерполяция, лагранжевы многочлены, формула Ньютона, дифференциальные деления.

KIRISH

Funksiyalarni yaqinlashtirish deganda murakkab funksiyani o‘ziga yaqin soddaroq funksiya bilan almashtirish (ma’lum xatolikda) tushuniladi. Funksiyalarni yaqinlashtirishning yana bir muhim jihati — bu murakkab funksiyalarni soddaroq ko‘rinishda tasvirlash orqali hisoblash jarayonini tezlashtirishdir. Hisoblash uchun juda ko‘p vaqt talab qiladigan yoki oddiy hisob-kitoblar yordamida soddalashtirish mumkin bo‘lmagan funksiyalar ko‘p hollarda ko‘phadlar yordamida yaqinlashtiriladi. Funksiyalarni ko‘phadlar yordamida yaqinlashtirishning asosiy afzalligi ular algebraik jihatdan juda qulaydir. Ko‘phadlarning hosilasini olish, integrallash, limitda hisoblash, qo‘shish va ko‘paytirish amallari sodda bo‘lgani uchun, ko‘plab hisoblash algoritmlari aynan shu usulga asoslanadi. Shuningdek, ko‘phadlar butun sonli darajalarda aniqlangan bo‘lib, ular uzluksiz va differensiallanuvchi bo‘lgani uchun matematik modellarda keng qo‘llanadi.

Funksiyani biror oraliqda yaqinlashtirish uchun interpolatsiya usullaridan foydalaniladi. Interpolatsiya- berilgan nuqtalar asosida noma’lum funksiyaning qiymatini aniqlash usulidir. Bunday usullardan eng keng qo‘llaniladiganlari Nyuton va Lagranj interpolatsion usullari hisoblanadi. Nyuton interpolatsiya formulasi faqat mustaqil o‘zgaruvchi x ning qiymatlari teng oraliqlarda berilgan bo‘lganda ya’ni x ning qiymatlari oralig‘i bir xil bo‘lganida qo‘llanilishi mumkin. Ammo Lagranj interpolatsiya formulasi esa x qiymatlari teng oraliqli bo‘lsa ham, teng oraliqli bo‘lmasa ham qo‘llanilishi mumkin. Nyuton interpolatsiyalash usuli bo‘linmali farqlarga asoslanganligi, ifodaning soddaligi va bosqichma-bosqich aniqlikni oshiruvchanligi bilan funksiyani yaqinlashtirishning boshqa metodlaridan ajralib turadi. Nyuton usulining Lagranj usulidan yana bir farqi shundaki, yangi nuqta qo‘shilganida ifoda o‘zgarmaydi, balki qo‘shimcha had hisoblanadi.

1- bo‘linmali farqlar	$f[x_i; x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$
2- bo‘linmali farqlar	$f[x_i; x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$
3- bo‘linmali farqlar	$\begin{aligned} f[x_i; x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] \\ = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i} \end{aligned}$

Aytaylik bizga $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n))$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. f funksiyaning **birinchi tartibli bo‘lingan ayirmalari** soni n ta bo‘lib, ular har bir $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ nuqtalar uchun hisoblanadi. Bular funksiyaning nolinch darajali bo‘linmali farqlari hisoblanadi $f[x_i] = f(x_i)$. Qolgan bo‘linmali farqlar esa induktiv usul bilan aniqlanadi. Birinchi, ikkinchi va uchinchi bo‘linmali farqlar mos ravishda $f[x_i; x_{i+1}]$, $f[x_i; x_{i+1}, x_{i+2}]$, $f[x_i; x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ kabi belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi:

Ushbu bo‘linmali farqlardan foydalanib Nyuton interpolatsiya formulasini tuzamiz.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_k) = \\ &= f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots \dots \\ &+ f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Lagranj interpolatsion formulasining umumiy ko‘rinishi esa quyidagicha:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Bu formulani ochib chiqsak,

$$\begin{aligned} L_n(x) &= y_0 \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)} + y_1 \\ &\cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n)} + \dots \dots \dots + y_n \\ &\cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

ko‘rinishga keladi. Bu ko‘phad Lagranj interpolatsion formulasi deyiladi. Bu formulaning xususiy hollarini quraylik $n=1$ bo‘lganda Lagranj ko‘phadi ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqli formulasini beradi.

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f(x_1)$$

Agar $n=2$ bo‘lsa, u vaqtda kvadratik interpolatsion ko‘phadga ega bo‘lamiz, bu ko‘phad uchta nuqtadan o‘tuvchi va vertikal o‘qqa ega bo‘lgan parabolanani aniqlaydi.

1-misol. -1,0,1 nuqtalarda mos ravishda 2, 4,7 qiymatlarni qabul qiluvchi ko‘phad tuzing.

Yechish. Shartga ko‘ra $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 4$, $f(x_2) = 7$.

1-usul. Lagranj formulasidan foydalansak,

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)} \cdot f(x_2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0) \cdot (x-1)}{(-1-0) \cdot (-1-1)} \cdot 2 + \frac{(x-(-1)) \cdot (x-1)}{(0-(-1)) \cdot (0-1)} \cdot 4 + \frac{(x-(-1)) \cdot (x-0)}{(1-(-1)) \cdot (1-0)} \cdot 7 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + 4$$

ifodani hosil qilamiz va bu noma'lum funksiyaning ko‘phad bilan yaqinlashtirilgan ko‘rinishidir.

2-usul. Nyuton interpolatsiya formulasidan foydalansak

$$P_n(x) = f[x_0] + \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

Bu ifodadagi $f[x_1, x_2]$ va $f[x_0, x_1]$ larni ochsak

$$P_n(x) = f[x_0] + \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

formula kelib chiqadi berilgan qiymatlarni qo‘yib chiqsak jadval ko‘rinishda berilgan funksiya yaqin ko‘phad hosil qilinadi.

$$P_n(x) = 2 + \frac{4-2}{0-(-1)} \cdot (x-(-1)) + \frac{\frac{7-4}{1-0} - \frac{4-2}{0-(-1)}}{1-(-1)} \cdot (x-(-1)) \cdot (x-0) =$$

$$= 2 + 2 \cdot (x+1) + \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot x = 2 + 2x + 2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 4$$

ko‘rinib turibdiki Lagranj va Nyuton interpolatsiya formulalaridan foydalanilganda ikkala holda ham bir xil natija chiqadi.

2-misol. Berilgan funksiya $y = x^4$ ko‘rinishda bo‘lsa bu funksiya $x = 0,1,2$ nuqtalarda mos keladigan kvadratik ko‘phad tuzing.

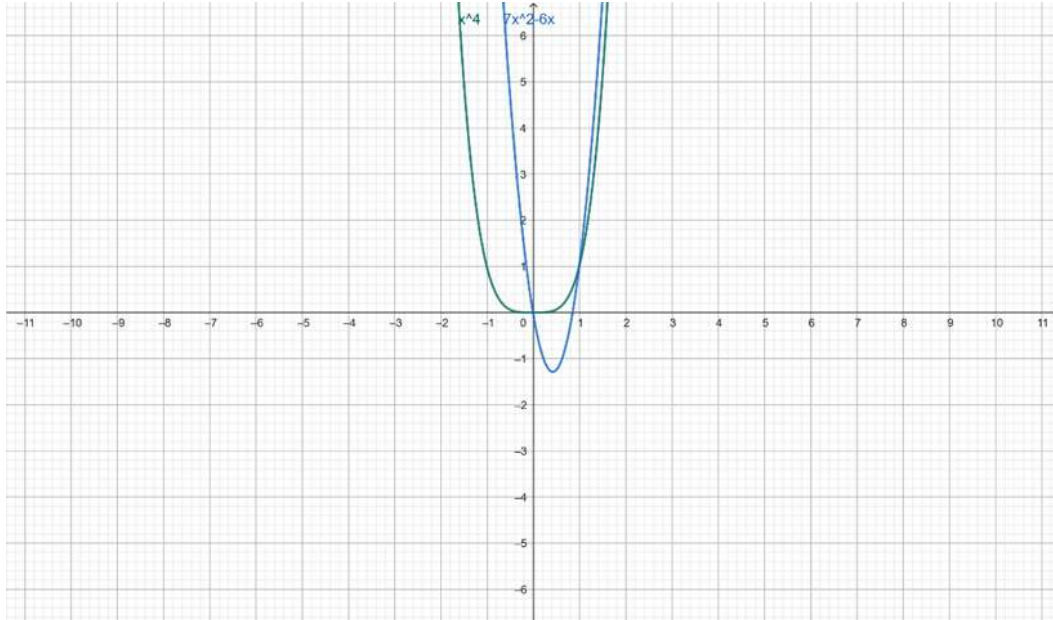
Yechish. Masala shartiga ko‘ra funksiyaning quyidagi nuqtalardagi qiymatlari mavjud. Lagranj formulasidan foydalansak: $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 16$ ekanligidan,

5-Fevral, 2026-yil

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)} \cdot f(x_2)$$

$$y = \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(0-1) \cdot (0-2)} \cdot 0 + \frac{(x-0) \cdot (x-2)}{(1-0) \cdot (1-2)} \cdot 1 + \frac{(x-0) \cdot (x-1)}{(2-0) \cdot (2-1)} \cdot 16$$

$$= -x(x-2) + 8x(x-1) = 7x^2 - 6$$



3-
misol.

Biz

e^x funksiyasini $[0, 2]$ oraliqda quyidagi nuqtalarda yaqinlashtiramiz: $x_0 = 0$ $x_1 = 0,5$ $x_2 = 1$ $x_3 = 1,5$ $x_4 = 2$ va ulardagi qiymatlar:

$$f(x_i) = e^{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$f[x_0] = e^0 = 1; \quad f[x_1] = e^{0,5} = 1,6487; \quad f[x_2] = e^1 = 2,7183;$$

$$f[x_3] = e^{1,5} = 4,4817; \quad f[x_4] = e^2 = 7,3891;$$

Ushbu qiymatlar asosida bo‘linmali farqlarni tuzamiz.

Birinchi bo‘linmali farqlar

$$f[x_0, x_1] = \frac{1,6487-1}{0,5-0} = 1,2974; \quad f[x_1, x_2] = \frac{2,7183-1,6487}{1-0,5} = 2,1392;$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{4,4817-2,7183}{1,5-1} = 3,5268; \quad f[x_3, x_4] = \frac{7,3891-4,4817}{2-1,5} = 5,8148;$$

Ikkinchi bo‘linmali farqlar

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2,1392-1,2974}{1-0} = 0,8418; \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{3,5268-2,1392}{1,5-1} = 1,3876;$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{5,8148-3,5268}{2-1} = 2,2880;$$

Uchinchi bo‘linmali farqlar

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1,3876-0,8418}{1,5-0} = 0,3639; \quad f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{2,2880-1,3876}{2-0,5} =$$

0,6003;

To‘rtinchi bo‘linmali farqlar

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0,6003 - 0,3639}{2 - 0} = 0,1182;$$

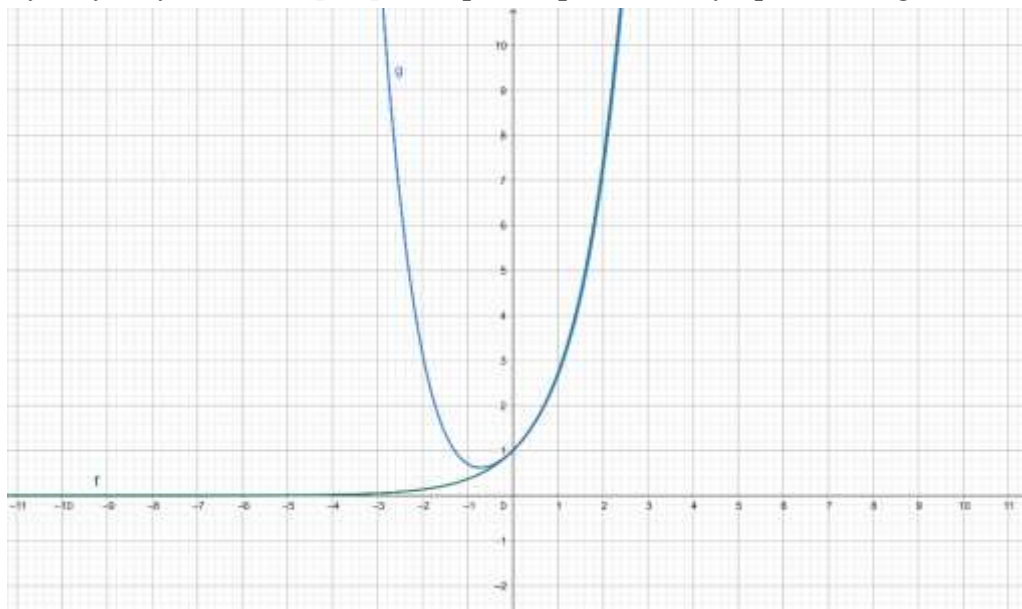
5-Fevral, 2026-yil

Ushbu bo‘linmali farqlarni Nyuton interpolatsiya formulasiga qo‘ysak quyidagi natija hosil bo‘ladi:

$$P_4(x) = 1 + 1,2974 \cdot (x - 0) + 0,8418 \cdot (x - 0) \cdot (x - 0,5) + 0,3639 \cdot (x - 0) \cdot (x - 0,5) \cdot (x - 1) + 0,1182 \cdot (x - 0) \cdot (x - 0,5) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1,5)$$

$$P_4(x) = 0,1182 \cdot x^4 + 0,0093 \cdot x^3 + 0,5619 \cdot x^2 + 0,9698 \cdot x + 1$$

Quyidagi rasmda $f = e^x$ hamda $g = P_4$ ya’ni e^x funksiyaning Nyuton interpolatsiyasi yordamida $[0;2]$ oraliqda ko‘phad bilan yaqinlashtirilgan ko‘rinishi.



XULOSA

Xulosa o‘rnida shuni aytish lozimki, murakkab funksiyalarni yaqinlashtirishda Lagranj va Nyuton interpolatsiya formulalarining o‘ziga xos afzalliklari va cheklovlari mavjud. Lagranj formulasi nazariy jihatdan sodda tuzilishga ega bo‘lib, tugun nuqtalari soni o‘zgarmas bo‘lgan hollarda qulaylik tug‘diradi. Nyuton formulasi esa sodda hisoblash xususiyatiga ega ekanligi bilan ajralib turadi va yangi tugunlar qo‘shilganda hisoblash jarayonini noldan boshlamaslik imkonini beradi. Har ikki usul ham funksiyalarni hisoblash jarayonini optimallashtirish va amaliy masalalarni soddaroq ko‘phadlar orqali ifodalashda yuqori samaradorlik ko‘rsatadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Burden R.L, Faires J.D Numerical Analysis, 10th Edition Cengage Learning 2015
2. Grewal. B.S va Grewal. J.S "Numerical Methods in Engineering and Science" Mercury learning and information 2019 7.
3. Коренблит Б.Я. – Численные методы и программирование. – Москва: Наука, 1982
4. R.K.Karimov “Hisoblash usullari” 1-qism Urganch-2004
5. G.P.Ismatullayev, M.S.Kosbergenova “Hisoblash usullari” Toshkent-2024
6. Isroilov.M.I “Hisoblash metodlari” 1-qism Toshkent-1998